О СУПЕРПОЗИЦИИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ: КОММУНИКАЦИОННЫЙ ПОДХОД[1]

Аблаев Ф.М., Аблаева С.Г.

Казанский государственный университет

1. Цель работы и краткое описание применяемого метода. Проблема представления непрерывной функции в виде суперпозиции непрерывных функций более простого вида хорошо известна, различные аспекты этой проблемы изложены в работе [5]. Обозначим $\mathcal{F}_p^k$ класс p раз непрерывно дифференцируемых функций от k переменных. А.Г.Витушкин [4] доказал существование в классе $\mathcal{F}_p^k$ функции, не представимой в виде суперпозиции функций из $\mathcal{F}_q^t$, если $k/p > t/q$. Такие функции (в рамках проблемы суперпозиции) естественно считать сложными функциями.

С точки зрения теории вычислений (computer science в англоязычной литературе) доказательства только существования сложных функций мало информативны. Как правило, при исследовании классов функций с хорошими выразительными возможностями почти все они оказываются сложными при некотором естественном выборе меры сложности. На практике остро встает проблема нахождения критерия просто реализуемых вычислений. В связи с этим одной из центральных проблем теории вычислений является проблема описания сложно реализуемых функций.

С нашей точки зрения проблема конструктивного задания функции (сложной функции), не представимой в виде конечной суперпозиции более простых (в некотором смысле) функций – это естественная модельная задача для теории вычислений, имеющая известную историю в классической математике. Исследованию этой проблемы в теории сложности вычислений посвящен ряд работ.

С.С.Марченков [8] предложил метод задания непрерывной функции на основе сложно реализуемых (в схемном смысле) булевых функций. В работе [8] сложно реализуемые булевые функции определяют непрерывную функцию из класса $\mathcal{F}_p^k$, которая не представима в виде суперпозиции функций из $\mathcal{F}_q^t$, если $k/p > t/q$. В настоящее время не известен конструктивный способ задания схемно сложно реализуемой булевой

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 96-01-01692.

функции, отличный от перебора булевых функций от данного числа переменных. Всего имеется 2^{2^n} булевых функций от n переменных. В теории сложности вычислений, имеющей дело с "конечной областью", аналогом алгоритмической неразрешимости (не конструктивности) является перебор экспоненциального числа вариантов. Формального определения эффективно решаемой (аналога конструктивности) задачи нет, но стало общепринятым считать задачу эффективной, если имеется алгоритм, решающий ее за время, ограниченное полиномом от "размера задачи". Достаточно подробно эти вопросы обсуждаются в книге [3]. Поэтому подход работы [8] нельзя считать полностью удовлетворительным с точки зрения теории вычислений.

Е.А.Асарин [1] предложил другой вариант вычислимого (в основе своей тоже переборного) задания сложно аппроксимируемой непрерывной функции. С.Б.Гашков [2] ввел в рассмотрение характеристику функциональных пространств, основанную на сложности приближенной реализации функций пространства. На основе анализа этой характеристики функциональных пространств получены уточнения теоремы Витушкина (см. [2]).

В нашей работе предлагается метод эффективного задания сложной непрерывной функции. Основу этого метода составляет анализ коммуникационной сложности (определяемой в работе) непрерывных функций. Впервые коммуникационные модели вычислений были исследованы в работе [12].

Мы доказываем, что функции, представимые в виде конечных суперпозиций функций заданного вида, имеют невысокую коммуникационную сложность. С другой стороны, коммуникационный метод позволяет эффективно указывать функции, которые имеют высокую коммуникационную сложность и, следовательно, не представимы в виде конечной суперпозиции функций заданного вида. Отметим, что коммуникационно сложная функция получается с использованием конструкции Колмогорова-Тихомирова ([7], с. 35). Роль коммуникационного подхода заключается в явном задании знаков $\gamma_s \in \{-1, +1\}$ конструируемой функции при помощи последовательности коммуникационно сложных булевых функций.

Наш подход эффективного построения сложной функции работает для непрерывных функций с довольно сложным условием (??) на модули непрерывности. При этом рассматриваются суперпозиции ограниченного вида. Открытым остается вопрос о возможности эффективного задания сложных непрерывных функций произвольной гладкости, представляемых суперпозициями произвольной глубины.

2. Функция $f_{\omega,g}$. Непрерывная действительная функция $f_{\omega,g}$ k действительных переменных определяется при помощи булевой функции g (точнее, последовательности $g = \{g_n\}$ единообразно определяемых булевых функций g_n) и простой стандартной непрерывной функции. Область определения $[0,1]^k$ функции $f_{\omega,g}$ разбивается на счетное число кубиков. В каждый кубик помещается простая непрерывная функция, принимающая максимальное (минимальное) значение в центре кубика и нулевое значение на его границах. Значение булевой функции в каждом кубике определяет знак (задает мультипликативный коэффициент $+1$ или -1) определямой функции.

Начнем с определения разбиения куба $[0,1]^k$.

Всюду в статье будем полагать $n = 2^j - 1$, $j \geq 1$. Обозначим через I_n отрезок $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}\right]$. Положим $I_n^k = \underbrace{I_n \times \cdots \times I_n}_{k}$ и $I^k = \bigcup_{n\geq 1} I_n^k \bigcup \{(0,\ldots,0)\}$.

Всюду Σ будет обозначать двоичный алфавит $\Sigma = \{0,1\}$. Как обычно, Σ^+ обозначает множество всех непустых последовательностей (слов) конечной длины в алфавите Σ, а Σ^n – множество всех слов длины n в алфавите Σ.

Пусть $a : \Sigma^+ \to [0,1]$ – отображение следующего вида: для последовательности $v = \sigma_1 \ldots \sigma_n$

$$a(v) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \sigma_i 2^{-i} + \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

Положим $A_n = \{a(v) : v \in \Sigma^n\}$. Для числа $a(v) \in A_n$ обозначим через $I_n(a(v))$ отрезок длины $\delta(n) = \frac{1}{(n+1)2^n}$ с центром в точке $a(v)$:

$$I_n(a(v)) = \left[a(v) - \frac{1}{(n+1)2^{n+1}},\ a(v) + \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}\right]. \tag{1}$$

Из определений множества точек A_n и отрезка $I_n(a(v))$ следует, что

1. для $a(v)$, $a(v') \in A_n$ таких, что $a(v) \neq a(v')$, отрезки $I_n(a(v))$ и $I_n(a(v'))$ могут пересекаться разве что по границе,
2. $\bigcup_{a(v)\in A_n} I_n(a(v)) = I_n$.

Определим функцию $\Psi_{n,a(v)}(x)$ на отрезке $I_n(a(v))$, $a(v) \in A_n$ условием

$$\Psi_{n,a(v)}(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{\delta(n)}(x - a(v)), & \text{если } a(v) - \frac{\delta(n)}{2} \leq x \leq a(v), \\ 1 - \frac{2}{\delta(n)}(x - a(v)), & \text{если } a(v) \leq x \leq a(v) + \frac{\delta(n)}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Вне отрезка $I_n(a(v))$ функцию $\Psi_{n,a(v)}(x)$ положим равной нулю.

- Функция $\Psi_{n,a(v)}(x)$ принимает максимальное значение 1 в центре отрезка $I_n(a(v))$ и принимает значение нуль на границах отрезка $I_n(a(v))$.

Для последовательности $v = (v_1, \ldots, v_k)$ такой, что $v_i \in \Sigma^n$, $1 \leq i \leq k$, точки $b(v) = (a(v_1), \ldots, a(v_k))$ обозначим $I_n^k(b(v)) = I_n(a(v_1)) \times \cdots \times I_n(a(v_k))$. Множество $I_n^k(b(v))$ – это k-мерный вещественный куб с длиной стороны $\delta(n)$ с центром в точке $b(v)$. Внутри каждого куба $I_n^k(b(v))$, $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \Sigma^{kn}$, $b(v) = (a(v_1), \ldots, a(v_k))$, мы определим функцию $\Psi_{n,b(v)}(x)$:

$$\Psi_{n,b(v)}(x) = \prod_{i=1}^{k} \Psi_{n,a(v_i)}(x_i),$$

где функции $\Psi_{n,a(v_1)}(x_1), \ldots, \Psi_{n,a(v_k)}(x_k)$ определены на соответствующих отрезках $I_n(a(v_1)), \ldots, I_n(a(v_k))$. Вне куба $I_n^k(b(v))$ функцию $\Psi_{n,b(v)}(x)$ положим равной нулю.

- Функция $\Psi_{n,b(v)}(x)$ принимает максимальное значение 1 в центре куба $I_n^k(b(v))$ и принимает значение нуль на границах куба $I_n^k(b(v))$.

Последовательность $g = \{g_n(v)\}$ булевых функций

$$g_n : \underbrace{\Sigma^n \times \cdots \times \Sigma^n}_{k} \to \{0, 1\}$$

определим следующим образом.

- Обозначим через $pat(n, k)$ следующее разбиение последовательности $v = (v_1, \ldots, v_k)$, где $v_i \in \Sigma^n$, $1 \leq i \leq k$. Каждое слово v_i последовательности v делится на две части – начало u_i и окончание w_i с длинами $l(n, k) = n - d(n, k)$ и $d(n, k) = \lceil (\log kn)/k \rceil$ соответственно. Мы будем писать $v = (u, w)$ и называть последовательность $u = (u_1, \ldots, u_k)$ *началом*, а последовательность $w = (w_1, \ldots, w_k)$ *окончанием* последовательности v.

Наряду с обозначением $g_n(v)$ будем использовать обозначение $g_n(u,w)$ для определяемой ниже булевой функции g_n. Функция $g_n(u,w)$ задается условием: $g_n(u,w)$ *равно значению бита с номером* $\alpha(w)$ *в слове* $u_1 \dots u_k w_1 \dots w_k$. Здесь $\alpha(w) = ord(w) + 1$, где $ord(w)$ означает целое число, двоичное представление которого есть двоичная последовательность w. При $\alpha(w) > kn$ положим $g_n(u,w) = 0$.

Функция $g_n(u,w)$ формально задается следующей формулой (мы используем стандартные обозначения из теории булевых функций [11]):

$$g_n(u,w) = \bigvee_{\substack{\sigma \\ 1 \le \alpha(\sigma) \le |v|}} \bigwedge_{i=1}^{kd(n,k)} y_i^{\sigma_i} \wedge x_{\alpha(\sigma)},$$

где y_j, σ_j и x_j – это j-е символы двоичных последовательностей w, σ и $u_1 \dots u_k w_1 \dots w_k$ в общей нумерации их элементов.

Следуя терминологии теории функций, введем понятие модуля непрерывности функции.

Для равномерно непрерывной функции $f(x)$ от $k \ge 1$ переменных модуль непрерывности $\omega_f(\delta)$ определяется как наименьшая верхняя грань $|f(x) - f(x')|$ по всем $x, x' \in [0,1]^k$ таким, что $|x - x'| = \max_{1 \le i \le k} |x_i - x'_i| \le \delta$ (см. книгу [9], параграф 3.4). Не каждая непрерывная функция является модулем непрерывности. Следующее простое условие является достаточным для того, чтобы функция $\omega(\delta)$ являлась модулем непрерывности: *функция* $\omega(\delta)$ *является модулем непрерывности, если* $\omega(\delta)/\delta$ *не возрастает с ростом* δ (см. [9], 3.2.3).

Пусть непрерывная на $[0,1]$ функция $\omega(\delta)$ является модулем непрерывности. Обозначим $f_{\omega,g}$ функцию, задаваемую рядом

$$f_{\omega,g}(x) = \sum_{\substack{n=2^j-1, \\ j \ge 1}} \sum_{v \in \Sigma^n} (2g_n(v) - 1)\omega(\delta(n))\Psi_{n,b(v)}(x). \tag{3}$$

Функцию $f_{\omega,g}$ доопределим по непрерывности в точке нуль куба $[0,1]^k$. Это возможно, так как $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$.

3. Теорема о суперпозиции функций. Будем рассматривать непрерывные функции действительных переменных, задаваемые в замкнутых ограниченных множествах. Такие функции являются равномерно непрерывными. Обозначим через $\mathcal{H}_\omega^k$ класс всех равномерно непрерывных функций от k переменных, модуль непрерывности которых не превышает по порядку заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$. Положим $\mathcal{H}_\omega = \cup_{k \ge 1} \mathcal{H}_\omega^k$.

Для чисел $\gamma \in (0,1]$ классы функций

$$\mathcal{H}_\gamma = \{f : \omega_f(\delta) \preceq \delta^\gamma\} \qquad (\gamma \in (0,1])$$

известны как классы Гельдера. Более общий класс

$$\mathcal{D} = \left\{ f : \lim_{\delta \to 0} \omega_f(\delta) \log \frac{1}{\delta} = 0 \right\}$$

содержит в себе классы Гельдера и называется классом Дини. Здесь и далее рассматриваются логарифмы по основанию 2.

Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ – некоторые классы равномерно непрерывных функций. Обозначим через $\mathcal{S}p^k[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ класс равномерно непрерывных функций от k переменных, представимых суперпозициями вида

$$F\left(h_1(x_1^1, \ldots, x_t^1), \ldots, h_s(x_1^s, \ldots, x_t^s)\right),$$

где $F(y_1, \ldots, y_s)$ – это функция из $\mathbf{B}$, а $\{h_i(x_1, \ldots, x_t) : 1 \le i \le s\} \subseteq \mathbf{A}$.

Непосредственно из определения следует, что для модулей непрерывности $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$ функция $\omega(\delta) = \omega_2(\omega_1(\delta))$ является модулем непрерывности и $\mathcal{S}p^k[\mathcal{H}_{\omega_1}, \mathcal{H}_{\omega_2}] \subseteq \mathcal{H}^k_\omega$.

Пусть $\widehat{\mathcal{H}}^k_\omega$ – множество функций из класса $\mathcal{H}^k_\omega$ со свойством: для всех функций $f \in \widehat{\mathcal{H}}^k_\omega$ и для всех δ вида $\delta = \delta(n)$ модуль непрерывности $\omega_f(\delta(n))$ функции f равен $\omega(\delta(n))$ с точностью до мультипликативной константы. Имеет место

Теорема о суперпозиции. *Пусть модули непрерывности $\omega_1(\delta)$, $\omega_2(\delta)$ таковы, что $\omega_2(\delta)$ строго убывает при убывании δ, для функции $\omega(\delta) = \omega_2(\omega_1(\delta))$ величина $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ не возрастает с ростом δ и*

$$\log \frac{1}{\omega_1(\delta)} = o\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{1-t/k}\right). \tag{4}$$

Пусть $k > t$. Тогда $f_{\omega,g}(x) \in \mathcal{H}^k_\omega \backslash \mathcal{S}p^k[\widehat{\mathcal{H}}^t_{\omega_1}, \mathcal{H}_{\omega_2}]$.

Заметим, что функции, модуль непрерывности которых удовлетворяет условию (??), не входят в класс Гельдера $\mathcal{H}_* = \cup_{\gamma \in (0,1]} \mathcal{H}_\gamma$. Но, например, класс $\mathcal{H}_{\omega_p}$ для $p > 1$, где

$$\omega_p(\delta) = \begin{cases} \ln^{-p} 1/\delta & \text{если } 0 < \delta \le a, \\ \ln^{-p} 1/a & \text{если } \delta > a, \end{cases}$$

$a = 1/(e^{p+1})$, таков, что модуль непрерывности $\omega_p(\delta)$ удовлетворяет аналогу условия (??)

$$\log \frac{1}{\omega_p(\delta)} = o\left(\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^c\right)$$

для произвольной константы $c > 0$, в частности, для $c = 1 - t/k$, $t < k$. Класс $\mathcal{H}_{\omega_p}$ для $p > 1$ входит в класс Дини $\mathcal{D}$.

Пусть модуль непрерывности $\omega_2(\delta)$ удовлетворяет условию теоремы, например, $\omega_2(\delta) = \delta^\gamma$, $\gamma \in (0,1]$. Тогда функция $f_{\omega,g}(x)$ от k переменных не представима в виде суперпозиции, первый уровень которой составляют функции из $\widehat{\mathcal{H}}^t_{\omega_p}$, где $t < k$, а на последующих уровнях находятся функции, суперпозиция F которых есть функция из $\mathcal{H}_{\omega_2}$. В частности, справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Функция $f_{\omega_p,g}(x)$ от k переменных входит в класс $\widehat{\mathcal{H}}^k_{\omega_p}$ и не представима в виде суперпозиции функций от t переменных из класса $\widehat{\mathcal{H}}^t_{\omega_p}$ на первом уровне суперпозиции и функций из класса $\mathcal{H}_1$ на последующих уровнях, если $t < k$.*

Литература

1. *Асарин Е.А.* О сложности равномерных приближений непрерывных функций // Успехи мат. наук. – 1984. – Т. 39. – N 3. – С. 157-170.

2. *Гашков С.Б.* Сложность приближенного вычисления действительных чисел, непрерывных функций и линейных функционалов // Автореферат дис... докт. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1992.

3. *Гэри М., Джонсон Д.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982. – 416 с.

4. *Витушкин А.Г.* К тринадцатой проблеме Гильберта // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 95. – N 4. – С. 243-250.

5. *Витушкин А.Г., Хенкин Г.М.* Линейные суперпозиции функций // Успехи мат. наук. – 1967. – Т. 22. – N 1. – С. 77-124.

6. *Колмогоров А.Н.* Различные подходы к оценке трудности приближенного задания и вычисления функций // Proc. Int. Congr. Math., 1962, Stockholm, 1963. – P. 352-356.

7. *Колмогоров А.Н., Тихомиров В.М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств и в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – Т. 14. – N 2. – С. 3-86.

8. *Марченков С.С.* Об одном методе анализа суперпозиции непрерывных функций // Проблемы кибернетики. – 1980. – N 37. – С. 5-17.

9. *Тиман А.Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960. – 427 с.

10. *Тихомиров В.М.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Московского университета, 1976. – 168 с.

11. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. М: Наука, 1986. - 272 с.

12. *Yao A.C.* Some complexity questions related to distributive computing //Proc. 11th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, 1979. – P. 209-213.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ОБЛАСТИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ПЛОТИНЕ[1]

Абушов О.Г., Лапин А.В.

НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарёва
Казанского государственного университета

1. Рассмотрим задачу фильтрации воды под действием силы тяжести через плотину, представленную областью $\tilde{\Omega}$. Считаем, что плотина на горизонтальном непроницаемом основании разделяет два водных бассейна с высотами $H_1 > H_2 \geq 0$. Пусть напор $u(x)$ и скорость фильтрации $\bar{v}(x)$ связаны нелинейным законом фильтрации

$$\bar{v}(x) = -k(|\nabla u|^2)\nabla u,$$

где k удовлетворяет при всех $x \in \tilde{\Omega}, \xi \in R^2$ следующим условиям:

1^0. функция $k(|\xi|^2)\xi_i$, $i = 1, 2$, непрерывна;

2^0. существуют производная $k'(|\xi|^2)$ и такие постоянные M и m, что $0 < m \leq 2k'(|\xi|^2)|\xi|^2 + k(|\xi|^2) \leq M$.

Функция $u(x)$ является решением краевой задачи в a priori неизвестной области фильтрации $\Omega \subset \tilde{\Omega}$:

$$\operatorname{div} \bar{v}(x) = 0, x \in \Omega; \quad u(x) = H_1, x \in \Gamma_1; \quad u(x) = H_2, x \in \Gamma_2;$$

$$\bar{v} \cdot \bar{\nu}(x) = 0, x \in \Gamma(\varphi) \cup \Gamma_N; \quad u(x) = x_2, x \in \Gamma(\varphi) \cup \Gamma(\sigma);$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 96-01-00123 и 98-01-00200.